ΔΕΥΤΕΡΑ 16 ΜΑΙΟΥ 2011
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. απόδειξη σελ 260
Α2. ορισμός Π.Α σελ 280
Α3.α) Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \qquad w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}$

Είναι $|z-3i|+|\overline{z}+3i|=2 \Rightarrow |z-3i|+|\overline{\overline{z}+3i}|=2 \Rightarrow |z-3i|+|z-3i|=2 \Rightarrow 2|z-3i|=2 \Rightarrow |z-3i|=1$

Είναι κύκλος με κέντρο $K(0,3)$ και ακτίνα $\rho=1$

Β2.

Είναι $\overline{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i} \Leftrightarrow (\overline{z}+3i)(z-3i)=1 \Leftrightarrow \overline{(z+3i)}(z-3i)=1 \Leftrightarrow |z-3i|^2=1 \Leftrightarrow |z-3i|=1$ ισχύει

Β3.

$$\left.\begin{array}{l} w=\alpha+\beta i \\ w\in R \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} w=\alpha \\ \overline{w}=\alpha \end{array}\right\} \Leftrightarrow w=\overline{w}$$

<u>Αρκεί να δείξω ότι:</u> $w=\overline{w}$

$$\overline{w}=\overline{z-3i+\frac{1}{z-3i}}=\overline{z}+3i+\frac{1}{\overline{z}+3i}=\frac{1}{z-3i}+\frac{1}{\frac{1}{z-3i}}=\frac{1}{z-3i}+z-3i=w$$

Άρα ο $w\in\mathbb{R}$

<u>Β΄ τρόπος</u>

$$w=z-3i+\frac{1}{z-3i}=z-3i+\overline{z}+3i=z+\overline{z}\in\mathbb{R}$$

Είναι $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i} \Rightarrow |w|=\left|z-3i+\dfrac{1}{z-3i}\right|$

$$\left.\begin{array}{r} \text{Οπότε } \left|z-3i+\frac{1}{z-3i}\right|\le|z-3i|+\left|\frac{1}{z-3i}\right| \Rightarrow |w|\le|z-3i|+\frac{1}{|z-3i|} \Rightarrow |w|\le 1+\frac{1}{1} \Rightarrow |w|\le 2 \\ \text{Επειδή } w\in R \end{array}\right\} \Rightarrow -2\le w\le 2$$

B4.

$$|z-w|=\left|z-z+3i-\frac{1}{z-3i}\right|=\left|3i-\frac{1}{z-3i}\right|\overset{B2}{=}|3i-\overline{z}-3i|=|-\overline{z}|=|\overline{z}|=|z|$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f(x)=x^2+\frac{2}{x} \quad ,x\neq 0$$

Είναι $f'(x)=2x-\frac{2}{x^2}=\frac{2x^3-2}{x^2} \quad , \quad x\neq 0$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^3-2=0 \Leftrightarrow 2(x^3-1)=0 \Leftrightarrow x^3=1 \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x=1$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-2}{x^2}=0 \Leftrightarrow 2x^3-2>0 \Leftrightarrow 2(x^3-1)>0 \Leftrightarrow x^3>1 \Leftrightarrow x>\sqrt[3]{1} \Leftrightarrow x>1$$

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	‖	↘		↗

Στο $(-\infty\ ,\ 0)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $(0\ ,\ 1]$ η f είναι γνησίως φθίνουσα

Στο $[1\ ,\ +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0=1$, το $f(1)=3$

Γ2.

Η εξισωση της εφπτομενης στο Α(2 , f(2)) είναι $y-f(2)=f'(2)(x-2)$

Είναι $f(2)=2^2+\frac{2}{2}=5$ και $f'(2)=4-\frac{2}{4}=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}$

Οπότε $y-5=\frac{7}{2}(x-2) \Rightarrow y-5=\frac{7}{2}x-2 \Rightarrow \ y=\frac{7}{2}x-2$

Γ3.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(x^2+\frac{2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2}{x}=+\infty$

και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2+\frac{2}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{2}{x} = -\infty$

Άρα η x = 0 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

Για την πλάγια ασύμπτωτη $y=\lambda x+\beta$

$$\lambda = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\cancel{^2}}{\cancel{x}}+\frac{2}{x}\right) = +\infty$$

$$\lambda = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+\frac{2}{x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x\cancel{^2}}{\cancel{x}}+\frac{2}{x}\right) = -\infty$$

Άρα δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο ∞

Γ4.

$$f(x)=x^2+\frac{2}{x}$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}+2x=\frac{1+2x^3}{x^2}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1+2x^3}{x^2}-3}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{\frac{1+2x^3-3x^2}{x^2}}{x^2-1}=\lim_{x\to1}\frac{2x^3-3x^2+1}{x^2\left(x^2-1\right)} \quad \textbf{(1)}$$

Με το σχήμα Horner στο $2x^3-3x^2+1$ έχουμε για ρ = 1

2	–3	0	1	ρ = 1
	2	–1	–1	
2	–1	–1	0	

Οπότε είναι $2x^3-3x^2+1=(x-1)\left(2x^2-x-1\right)$

Άρα από **(1)** $=\lim\limits_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(2x^2-x-1\right)}{x^2\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{0}{2}=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Αρκεί ν.δ.ο. $g'(x)=0$

$g(x)=xf(x)+\sigma\upsilon\nu x$

$g'(x)=\left(xf(x)+\sigma\upsilon\nu x\right)'=f(x)xf(x)-\eta\mu x=0$

άρα δίνεται: $f(x)xf(x)=\eta\mu x \Leftrightarrow f(x)+xf(x)-\eta\mu x=0$

Άρα: $g(x)=c$ και για $x=0$

$g(0)=0\cdot f(0)+\sigma\upsilon\nu 0=1$

επομένως η g σταθερή συνάρτηση και ο τύπος της $g(x)=1$

Δ2.

$$g(x)=xf(x)+\sigma\upsilon\nu x \Rightarrow g(x)-\sigma\upsilon\nu x=xf(x) \overset{x\neq 0}{\Rightarrow} f(x)=\frac{g(x)-\sigma\upsilon\nu x}{x}$$

Όμως $g(x)=1$ οπότε $f(x)=\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}$, $x\neq 0$

Δ3.

$1-\sigma\upsilon\nu x=x\eta\mu x \Rightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x-x\eta\mu x=0$

θεωρώ $h(x)=1-\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$

- h: συνεχής στο $\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{2}\cdot\eta\mu\dfrac{\pi}{2}=1-\dfrac{\pi}{2}<0 \\ \bullet\ h\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{2}\eta\mu\dfrac{3\pi}{2}=1+\dfrac{3\pi}{2}>0 \end{array}\right\} \Rightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right)h\left(\frac{3\pi}{2}\right)<0,$$

Επομένως από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε :

$h(x_0)=0 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x_0=x\eta\mu x_0 \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu x=x\eta\mu x$

Δ4.

Η f είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ ως πράξη συνεχών

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $f'(x)=\dfrac{x\etaμx-1+συνx}{x^2}$

Είναι $f(0)=0$ και $f(\pi)=\dfrac{2}{\pi}$

Από ΘΜΤ για την f στο $[0,\pi]$ υπάρχει $\xi\in(0,\pi)$ ώστε:

$$\left.\begin{aligned} f'(\xi)&=\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi-0}\\ f'(\xi)&=\frac{\xi ημ\xi-1+συν\xi}{\xi^2}\end{aligned}\right\}\Rightarrow \frac{\xi ημ\xi-1+συν\xi}{\xi^2}=\frac{\frac{2}{\pi}}{\pi}\Rightarrow \xi ημ\xi-1+συν\xi=\xi^2\frac{2}{\pi^2}$$

Επιμέλεια :

Μυλωνίδης Σ.
Τάνης Σ.
Ηλιάδης Κ.
Μαργαριτέλη Ε.
Πασχαλίδου Ξ.
Σαμαρά Φ.